پاسخنامه تشریحی

۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * صفحهٔ ۱۷ هندسه ۳

نکته: اگر A ماتریس $m\times p$ و B ماتریس $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد) در این صورت $A_{m\times p}.B_{p\times n}$ قابل‌تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{m\times p}.B_{p\times n}=C_{m\times n}=\left[C_{ij}\right]$، ماتریس C ماتریسی $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iاُم و ستون jاُم در آن، یعنی C_{ij} از ضرب نظیر به نظیر درایه‌های سطر iاُم ماتریس A در ستون jاُم ماتریس B و جمع جبری مقادیر حاصل به‌دست می‌آید.

ابتدا ضرب ماتریس‌ها را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\ 1 & -x & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^2+5\\ -x\\ -x+3\end{bmatrix}=0 \Rightarrow -x^2-5-2x-x+3=0$$

$$\xrightarrow{\text{معادله را مرتب می‌کنیم}} x^2+3x+2=0$$

حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله با توجه به اینکه $\Delta>0$ است، برابر ۲ است.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه‌های ۱۹ و ۲۰ هندسه ۳

نکته: ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری دارد: $A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

نکته: $AI=IA=A$

نکته: برای ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. به‌عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n},\ r\in R \Rightarrow r\left[a_{ij}\right]=\left[ra_{ij}\right]$$

نکته: $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad C=A\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}B+A\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}B$$

ماتریس A را از سمت چپ و ماتریس B را از سمت راست فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$C=A(\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix})B=A\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}B=A(2I)B \Rightarrow C=2AB=2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$C^{100}=2^{100}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}^{100}=2^{100}\begin{bmatrix}2^{100} & 0\\ 0 & 2^{100}\end{bmatrix}=2^{200}I$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

برای به دست آوردن سطر سوم ماتریس A کافی است سطر سوم ماتریس اول را در دو ماتریس بعدی ضرب کنیم.

بنابراین:

$$\text{سطر سوم ماتریس } A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 6 & 9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\text{سطر سوم ماتریس } A=\begin{bmatrix}3 & 7 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 1 & -5\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A برابر با $7+1-5=3$ است.

۴-گزینه ۲ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}m & m+1 & m+2\end{bmatrix}\qquad AB=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & m+1 & m+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m & m+1 & m+2\\ m & m+1 & m+2\\ m & m+1 & m+2\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های BA برابر ۲۷ است، پس: $3(3m+3)=27\Rightarrow m=2\Rightarrow B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

بنابراین:

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+3+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\end{bmatrix}$$

۵-گزینه۳

$$A^2-4A+5I=0\xrightarrow{A^{-1}\times}I-4A^{-1}+5(A^{-1})^2=0$$

با کمی مرتب سازی داریم:

$$(A^{-1})^2-\frac{4}{5}A^{-1}+\frac{1}{5}I=0$$

با توجه به معادله طبق قضیه کیلی-همیلتون در ماتریس جمع درایه‌های قطری برابر $\frac{4}{5}$ و دترمینان آن برابر $\frac{1}{5}$ است که از بین گزینه‌ها فقط گزینه سه این خاصیت را دارد.

۶-گزینهٔ «۲»

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 6\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\-1 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -18\\-9 & 38\end{bmatrix}$$

$$A^4=mA+nI\Rightarrow\begin{bmatrix}11 & -18\\-9 & 38\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m & 2m\\m & -2m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & 0\\0 & n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}11 & -18\\-9 & 38\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+n & 2m\\m & -2m+n\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=-9\\ m+n=11\Rightarrow n=20\end{cases}$$

۷-گزینهٔ «۴» ابتدا ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}\quad A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که $A^3=-I$ است، پس داریم:

$$\begin{cases}A^{999}=(A^3)^{333}=(-I)^{333}=-I\\ A^{1000}=A^{999}\times A=-I\times A=-A\\ A^{1001}=A^{999}\times A^2=-I\times A^2=-A^2\end{cases}\Rightarrow B=A^{999}+A^{1000}+A^{1001}=-(I+A+A^2)$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس B، برابر (-2) است.

۸-گزینهٔ «۳» ابتدا حاصل عبارت داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & -x & -1 \\ -1 & 3 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -4 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 & 2x+5 & x+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -4 \\ x \end{bmatrix} = [x^2 - x - 8x - 20 + x^2 + 3x] = 2x^2 - 6x - 20$$

حال عبارت به دست آمده را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - 6x - 20 < 0 \Rightarrow 2(x^2 - 3x - 10) < 0 \Rightarrow 2(x-5)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 5$$

در بازهٔ حاصل، اعداد صحیح ۱− ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ وجود دارد.

۹-گزینهٔ «۱» برای کوتاه کردن محاسبات به سراغ قضیه کیلی همیلتون می‌رویم. با توجه به این قضیه خواهیم‌داشت:

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + |A|\,I = 0 \Rightarrow A^2 - \underbrace{\left(a + \frac{1+bc}{a}\right)}_{\frac{a^2+1+bc}{a}} A + I = 0$$

$$\xrightarrow{A^{-1}\times} A - \frac{a^2+1+bc}{a} I + A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{a^2+1+bc}{a} I - A$$

$$\xrightarrow{\times a} aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)I - aA$$

۱۰-گزینهٔ «۲» گزینه‌های یک و سه به وضوح غلط می‌باشند بنابراین کافی است گزینه‌های دو و چهار را بررسی کنیم:

گزینه‌ی دو: $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ پس گزینه‌ی دو صحیح است.

گزینه‌ی چهار: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ برای اینکه A وارون‌پذیر نباشد باید دترمینان آن برابر صفر باشد. پس A وارون پذیر است و این گزینه صحیح نیست.

۱۱- گزینهٔ «۱»

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + A^2 + \underbrace{A^3 + A^4 + A^5}_{\bar{O}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \bar{O} \xrightarrow{\times A} A^4 = \bar{O} \xrightarrow{\times A} A^5 = \bar{O}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌های ماتریس حاصل $= 0 + 7 + 2 + 3 = 12$

۱۲- **گزینهٔ «۲»** چون A ماتریس اسکالر است پس تمامی درایه‌های روی قطـر اصلی با هم برابرند و سایر درایه‌ها صفر هستند. پس در این‌صورت:

$$\begin{cases} x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x=-1,0$$

$x=-1$ غیرقابـل قبـول اسـت، چـون درایـهٔ a_{11} بـه صـورت $\frac{1}{x+1}$ اسـت و به‌ازای $x=-1$ بی‌معنا می‌شود. پس $x=0$ قابل قبول است و ماتریس اسـکالر A به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{y}{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{y}{-2}=1 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow A=I$$

۱۳- **گزینهٔ «۱»**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2-3A=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب درایه‌های غیر قطر اصلی ماتریس برابر است با: $2^6=64$

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۱، درس ۱ هندسه ۳

نکته: برای اینکه ماتریس $A_{m\times n}\times B_{p\times q}$ قابل‌تعریف باشد، باید $n=p$ باشد که در این صورت ماتریس حاصل‌ضـرب به‌صـورت $C_{m\times q}$ خواهد بود.

با توجه به نکته و ماتریس‌های $A_{m\times n}$، $B_{p\times q}$ و $C_{r\times s}$ برای آنکه ماتریس AB وجود داشته باشـد، بایـد $n=p$ باشـد. در ایـن صـورت ماتریس AB از مرتبهٔ $m\times q$ خواهد بود و برای آنکه ماتریس $(AB)^2$ وجود داشته باشد باید AB مربعی باشد (توان فقط برای ماتریس‌های مربعی تعریف می‌شود.) و در نتیجه $m=q$ است.

پس ماتریس $(AB)^2$ از مرتبهٔ $m\times m$ است و چون $C_{r\times s}$ است، برای آنکه $(AB)^2+C$ وجود داشـته باشـد بایـد $r=s=m$ باشـد.

بنابراین داریم: $\frac{q+s+p}{r+n+s}=\frac{m+m+n}{m+n+m}=1$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فصل ۱، درس ۱ هندسه ۳

ابتدا می‌توان نوشت:

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}-(AB+BA)+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}-(AB+BA)$$

$$\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$